

Cylinder braid について

小 林 雅 子

〔抄 録〕

低次元トポロジーで扱われる結び目 (knot)・絡み目 (link) の表現方法の一つとして、また、それ自身重要な研究課題となる組みひも (braid) について考える。従来組みひもは基本的に三次元空間内の立方体内の strings としてとらえ、射影によって平面上の矩形内のダイアグラムとして表現するため、元の結び目・絡み目が周期性や対称性を持つ場合にはその特性を十分に表していなかった。そこで、平面上のアニュラス内のダイアグラムとして表現する、周期性・対称性を持った組みひも (cylinder braid) を考え、strings 数の少ない場合に自明でない cylinder braid にはどのようなダイアグラムが作られるのかを考察する。

キーワード：低次元トポロジー、結び目、組みひも、knot、braid

1. Introduction

本論文では結び目理論で用いられる braid 表現について、別の表現方法を提案し、いくつかの性質を述べる。

本論文では \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{R} はそれぞれ自然数、整数および実数全体の集合を表す。低次元位相幾何学の大きな課題として結び目・絡み目の分類と性質の研究がある。結び目・絡み目の用語については [1],[2] に従う。

定義 1.1. 3次元空間内の部分集合 K が $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^2$ と同相であるとき、 K を結び目という。有限個の互いに交わらない結び目の和集合を絡み目という。また、絡み目を構成する個々の結び目を成分という。

定義 1.2. 2つの絡み目が3次元空間で全同位（アンビエントイソトピック）であるとき、同値であるという。また、この同値類を結び目の型という。

実際に図形で表現する場合は $f(S^1) \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$ について、 $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 、 $p(x, y, z) = (x, y)$ なる射影を用いて、 $p|_{f(K)}$ の原像が 1 点でないような点 (これを交点という) $a \in p|_{f(K)} f(K)$ に上下関係の印をつけることで結び目であることを表現する。これを結び目・絡み目のダイアグラムという。

図 1 はダイアグラムである。交点において z 座標の値が小さい方の arc は途切れているように描く。

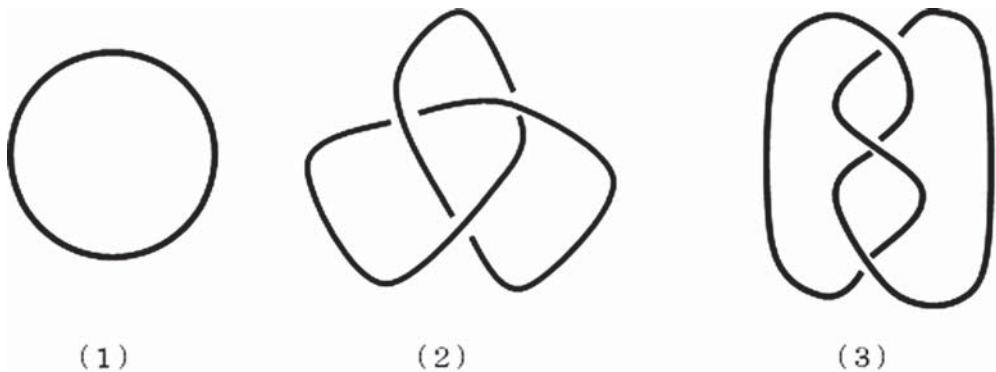


図 1 : 自明な結び目と trefoil

このセクションでは混乱を避けるため、一つの結び目を示すときは K , その同値類である結び目の型を示すときは K を用いることにする。

結び目・絡み目の分類、数え上げについて最も基本的な用いられるのは最小交点数である。

定義 1.3. 射影 $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p(x, y, z) = (x, y)$ とする。1 つの結び目 K について、 $p|_K: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ なる制限写像を考えたとき $p|_K(K)$ の各点の原像が高々 2 点であり、原像が 2 点となる $p|_K(K)$ の点が高々有限個であるとき、その個数を K の交点数という。

また、 K と同型な交点数が数えられる結び目全てを考え、その交点数を数えたときその最小数を K の同値類である結び目 K の最小交点数という。

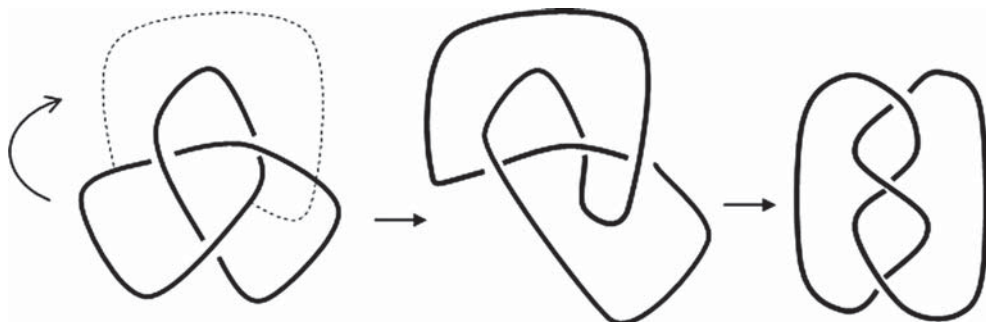


図 2 : 同値な結び目の変形

例えば図 1 (1) は自明な結び目と呼ばれるものであり、最小交点数 0 である。図 1 (2) は trefoil と呼ばれる結び目であり、最小交点数 3 である。

図 1 の (2) と (3) は同値な結び目であることが容易にわかる。(図 2) また、公点数が 1 か 2 の場合は自明な結び目と同型であることが証明できるので、最小交点数が 1 や 2 の結び目は存在しないこともわかる。

このように 1 つの結び目 (の型) の最小交点数を求めることも多く研究されたが、逆に交点数として自然数が与えられたとき、それを最小交点数として持つ結び目を実現することも結び目の「数え上げ」として研究されている。交点数の少ない結び目が「簡単な」結び目であるとも考えることもできるが、交点数が 4 ほど以上になると既に系統だった表にはならない。

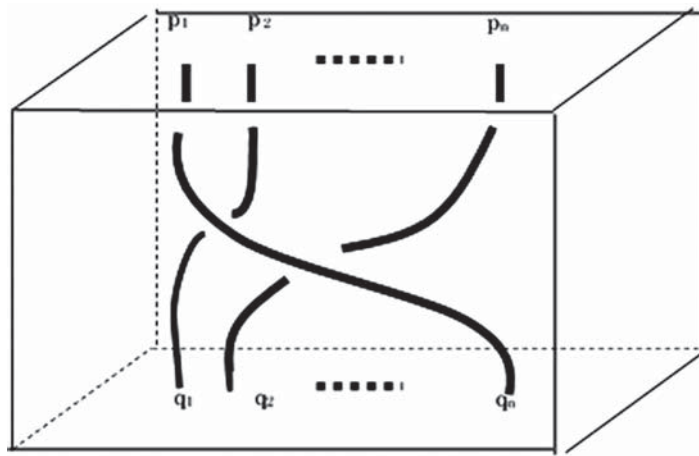


図 3 : braid

もう一つの考え方として結び目・絡み目を braid (ブレイド (組みひも)) で表現することができる。 $\mathbf{R}^3 \supset I^3 = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ について $2n$ 点 ($n \in \mathbf{N}$) $p_i = (\frac{1}{2}, \frac{i}{n+1}, 1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $q_i = (\frac{1}{2}, \frac{i}{n+1}, 0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を考える。 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ と $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ を結ぶ互いに交わらない I^3 内の n 本のひもを s_1, s_2, \dots, s_n とする。ただし各ひも s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 上の点はそのひもに沿って上面から下面に移動するとき、その点の z 座標は常に減少するという条件が付いているものとする。

定義 1.4. n 次 braid (ブレイド) とは、このようなひもの和 $b = s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_n$ のことである。各 s_i はこの braid の string という

$I^3 = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\} \supset b$ なる braid について、 p_i と q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を結ぶ n 本の arc を $\mathbf{R}^3 - \{(x, y, z) | 0 \leq x, y \leq 1, 0 < z < 1\}$ 内に図 4 のように考え b との和を考えると結び目または絡み目ができる。よって、結び目・絡み目を考える代わりに braid を考えることも有効

である。

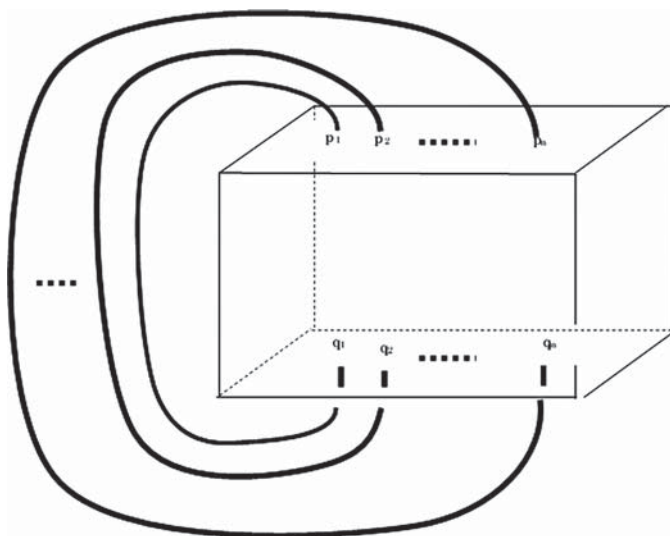


図 4

今後 braid は \mathbb{R}^3 の y 方向への射影を考え、ひもの上下関係を示す印をつけることで表すことにする。これをブレイドのダイアグラムと呼ぶことにする。

定義 1.5. 2つの braid b_0 と b_1 が同値であるとは、ひもの端点を固定したままひも同士を交わらせずに形を変えるような変形で、 b_0 を b_1 に変形できることである。

結び目・絡み目の同値が braid の上の同値性にいくつかの操作を加えることで表されることも知られている。同値な braid は同じものとみなすことにする。

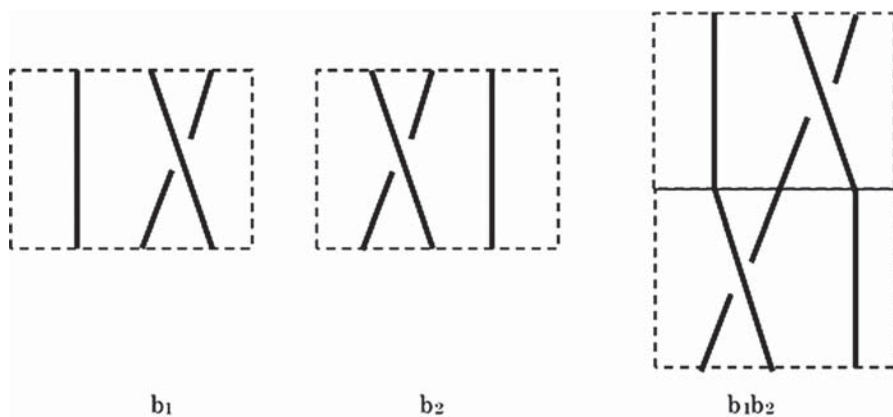


図 5 : braid の積

2つの braid b_1, b_2 に対し b_1 を上に b_2 を下にしてそのまま重ねてできる braid を b_1 と b_2 の積といい、 $b_1 b_2$ で表す。図5ではダイアグラムでこの積の例を示している。

この積演算を用いて braid は群になることが知られており、これを n 次 braid 群という。この群の単位元は p_i と q_i を z 軸に平行な直線で結んだ「自明な」braid であり、図6のように i 番目と $i+1$ 番目のひもだけを i 番目のひもが手前に来るようにひねった braid σ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) を考えるとこの $n-1$ 個の braid が braid 群の生成元になることが知られている。

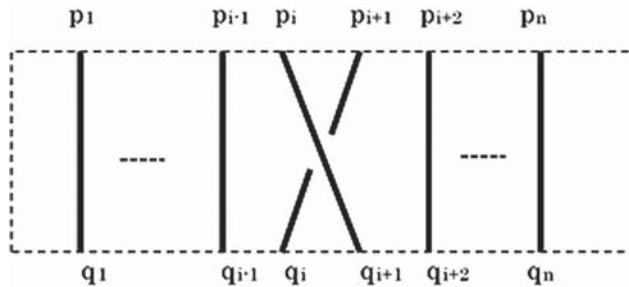


図6 : braid 群の生成元

2. Cylinder Braid の定義

n 次 braid を用いると全ての結び目・絡み目を表現できることは知られているが、結び目・絡み目の特性を braid 表現で必ずしも実現できるわけではない。ここでは特に結び目・絡み目の xy 平面への射影図が、 xy 平面の原点に関する点対称であるときの表現を考察する。

n 次 braid は基本的に $\mathbf{R}^3 \supset \Gamma^3 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ の部分集合であったが、点対称の特性を表すため Γ^3 の代わりに $I \times S^1 \times I$ を用いることにする。ただし、 $S^1 = \{\theta \in \mathbf{R} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\} / 0 \sim 2\pi$ と表すことにする。

$I \times S^1 \times I$ 内の $4n$ 点 ($n \in \mathbf{N}$) $p_i = (1, (i-1)\pi/2n, 1)$ 、 $q_i = (1, (i-1)\pi/2n, 0)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) を考える。 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ と $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ を結ぶ互いに交わらない $I \times S^1 \times I$ 内の $2n$ 本のひもを s_1, s_2, \dots, s_{2n} とする。ただし各ひも s_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) 上の点とそのひもに沿って p_i から q_i に移動するとき、その点の第3座標は常に減少し、また $f: I \times S^1 \times I \rightarrow I \times S^1 \times I$, $f(x, y, z) = (x, y + \pi, z)$ なる自己同相写像について、 $f(\cup_{i=1}^n s_i) = \cup_{i=1}^n s_i$ となる、という条件が付いているものとする。

定義 2.1. $2n$ 次 cylinder braid とは、このようなひもの和 $b = s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_{2n}$ のことである。各 s_i はこの braid のひも (string) という。

cylinder braid は $I \times S^1 \times I$ 内の「ひも」の和であるが、簡単のため、第1座標に関する射

影 $p: I \times S^1 \times \rightarrow \{0\} \times S^1 \times I$ を考えこの射影に関する射影図上で、上下関係の印をつけて議論することにする。この図を cylinder braid のダイアグラムと呼ぶことにする。図 7 は $n = 3$ の cylinder braid のダイアグラムの例である。

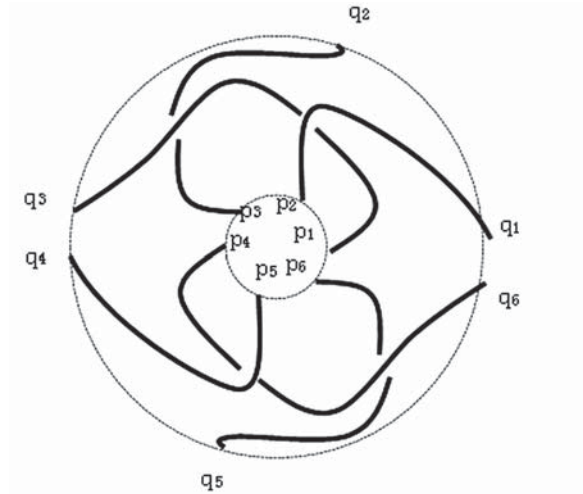


図 7 : cylinder braid のダイアグラムの例

定義 2.2. 2つの cylinder braid b_0 と b_1 が同値であるとは、ひもの端点を固定したままひも同士を交わらせずに形を変えるような変形で、 b_0 を b_1 に変形できることである。

同値な braid は同じものとみなすことにする。2つの cylinder braid b_1 , b_2 に対し同心円のアニュラスを2つ描き、内側に b_1 、外側に b_2 をおいてそのまま重ねてできる cylinder braid を b_1 と b_2 の積といい、 $b_1 b_2$ で表す。

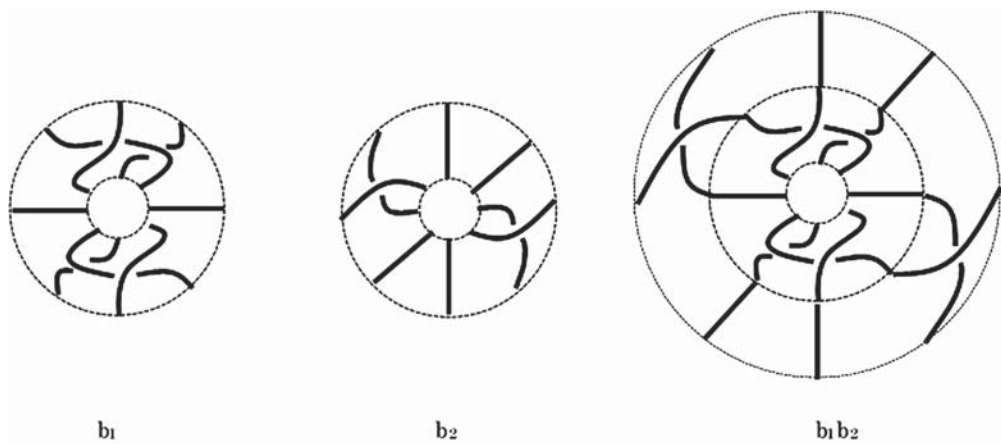


図 8 : cylinder braid の積の例

通常の braid では1つの string を右(または左)1方向に隣の string と交差させることは高々

$n-1$ 回しかできないが、cylinder braid では1つの string を第2座標 S^1 方向に隣の string と交差させ続けることが可能になるため、次の制約をつける。

定義 2.3. 1つの string について、第2座標 S^1 方向に連続して $n+1$ 回以上 over crossing があるダイアグラムを無効なダイアグラムという。無効なダイアグラムでないダイアグラムを有効なダイアグラムという。

定義 2.4. p_i と q_i を第1、第2座標を固定して繋ぐ $2n$ 本の strings $\{(i-1)\pi/2n\} \times [0, 1]$, ($i = 1, 2, \dots, 2n$)があるダイアグラムを σ_0 と書く。(図9(1))このダイアグラムには交差点がない。また、 $n \in \mathbb{N}$ について、 $2n$ -string cylinder braid の元 $\sigma_{i,k}$ を次のように定義する。

$1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-1$ ($k \in \mathbb{N}$) の場合：(図9(2)) $\sigma_{i,k}$ のダイアグラムは p_i と q_{i+k} を繋ぐ string、 p_j と q_{j+1} を繋ぐ string ($i+1 \leq j \leq i+k$)、 p_{i+n} と q_{i+k+n} を繋ぐ string、 p_j と q_{j+1} を繋ぐ string ($i+1+n \leq j \leq i+k+n$)、 p_j と q_j を繋ぐ string ($i+k+n+1 \leq j \leq i-1, i+k+1 \leq j \leq i+n-1$) の $2n$ 本の string からなる。ただし自然数は modulomo $2n$ で考える。さらに p_i と q_{i+k} を繋ぐ string と p_{i+n} と q_{i+k+n} を繋ぐ string が over crossing となるようにする。

$1 \leq i \leq n, -n+1 \leq k \leq -1$ ($k \in \mathbb{Z}$) の場合：(図9(3)) $\sigma_{i,k}$ のダイアグラムは p_i と q_{i+k} を繋ぐ string、 p_j と q_{j+1} を繋ぐ string ($i+k+1 \leq j \leq i-1$) p_{i+n} と q_{i+k+n} を繋ぐ string、 p_j と q_{j+1} を繋ぐ string ($i+k+n+1 \leq j \leq i-1+n$)、 p_j と q_j を繋ぐ string ($i+1 \leq j \leq n+i+k-1, n+i+1 \leq j \leq i+k-1$) の $2n$ 本の string からなる。ただし自然数は modulomo $2n$ で考える。さらに p_i と q_{i+k} を繋ぐ string と p_{i+n} と q_{i+k+n} を繋ぐ string が over crossing となるようにする。

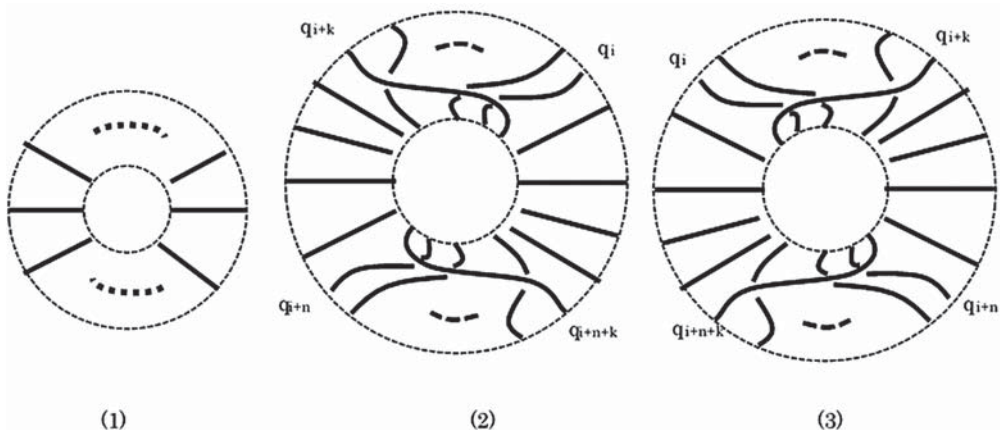


図9

$\sigma_{i,1}$ と $\sigma_{i,-1}$ ($1 \leq i \leq n$) のいくつかの積で全ての cylinder braid を表現できることが (通常の braid の場合と同様にして容易に証明できるが、ここでは有効なダイアグラムになることを念

頭にして $|k| \geq 2$ の場合の σ_{ik} も定義している。このことにより、この定義の σ_{ik}, σ_0 では積に関して群をなすことを考えていない。

いくつかの σ_{ik} の積を word と呼ぶことにする。

3. $n = 2$ の場合の考察

$n = 2$ の場合の σ_0 は図 10 (1) であり、元は図 10 に示した (2) $\sigma_{1,1}$ (3) $\sigma_{1,-1}$ (4) $\sigma_{2,1}$ (5) $\sigma_{2,-1}$ の 4 種類である。

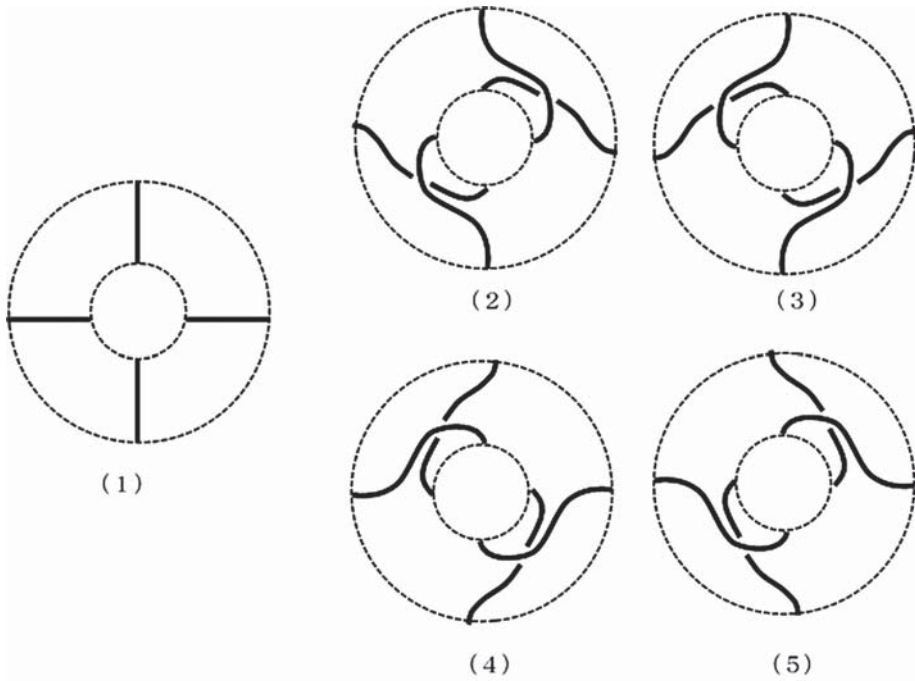


図 10: $n = 2$ の cylinder braid の元

このとき、容易に次のことがわかる。

補題 3.1. (1) 有効な word を作る時、 $\sigma_{1,1}$ の次の元は $\sigma_{1,1}$ か $\sigma_{1,-1}$ のみである。

(2) 有効な word を作る時、 $\sigma_{1,-1}$ の次の元は $\sigma_{1,1}$ か $\sigma_{1,-1}$ のみである。

証明： $\sigma_{1,1}\sigma_{2,1}$ という word をダイアグラムで実現すると、 p_1 と p_3 を繋ぐダイアグラムと同値になり、有効ではない。

また、 $\sigma_{1,1}\sigma_{2,-1}$ という word をダイアグラムで実現すると、 σ_0 と同値になる。(図 11)

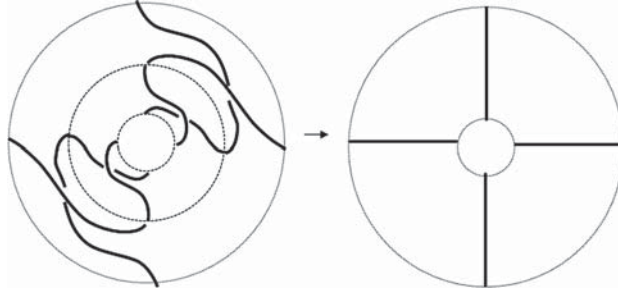


図 11

同様に、

$\sigma_{1,-1} \sigma_{2,-1}$ という word をダイアグラムで実現すると、 p_1 と p_3 を繋ぐダイアグラムと同値になり、有効ではない。また、 $\sigma_{1,-1} \sigma_{2,1}$ という word をダイアグラムで実現すると、 σ_0 と同値になる。

上の補題から、 $n = 2$ の場合は、cylinder braid は一通りの記述で表すことができることがわかる。

命題 3.2. ダイアグラムの原点を中心とした回転移動を除き、4-string cylinder braid の word は次のように記述される。

$$(\sigma_{1,1})^{k_1} (\sigma_{1,-1})^{h_1} (\sigma_{1,1})^{k_2} (\sigma_{1,-1})^{h_2} \dots (\sigma_{1,1})^{k_r} (\sigma_{1,-1})^{h_r}$$

ただし、 $r \in \mathbf{N}$, $k_i, h_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ($1 \leq i \leq r$), $(\sigma_{1,\epsilon})^k$ は元 $\sigma_{1,\epsilon}$ を k 回繰り返すことを表す。

証明： $\sigma_{2,1}$ を $-\pi/2$ 回転させると $\sigma_{1,1}$ になる。また、 $\sigma_{2,-1}$ のを $-\pi/2$ 回転させると $\sigma_{1,-1}$ になる。よって、word の最初の元は $\sigma_{1,1}$ または $\sigma_{1,-1}$ としてよい。よって、補題 3.1 よりしたがう。

命題 3.2 の word をダイアグラムで示したものが図 12 である。

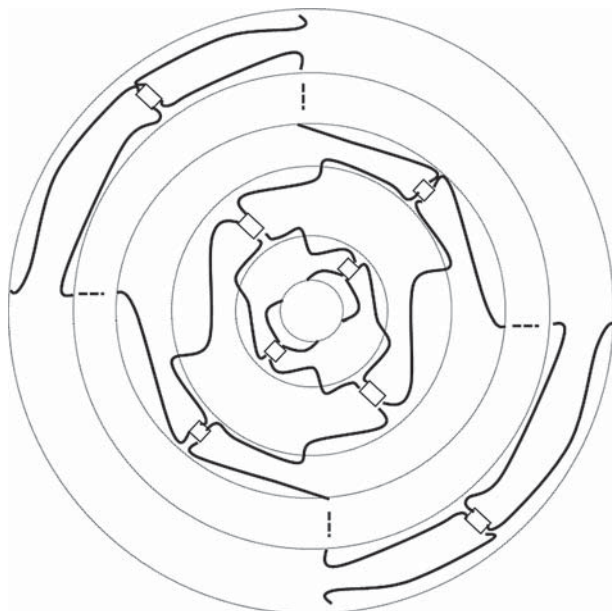


図 12

ただし図中の四角は下図のような k_i (h_i) crossing を示す。

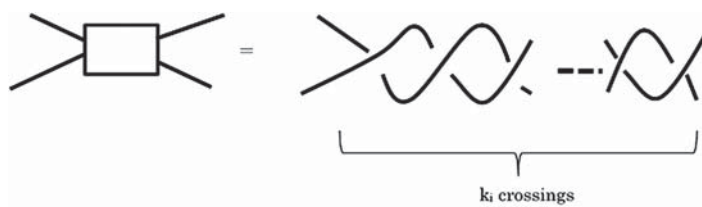


図 13

特に命題 3.2 において $k_i = h_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$), としたときの $\sigma_{1,1} \sigma_{1,-1} \sigma_{1,1} \sigma_{1,-1} \sigma_{1,1} \sigma_{1,-1} \sigma_{1,1}$ が図 14 であり、

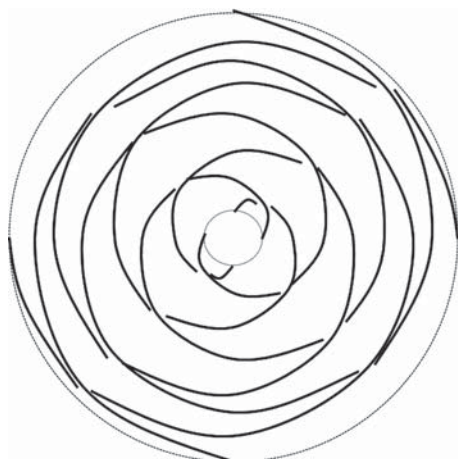


図 14



図 15

このダイアグラムを従来の braid 表現で表そうとすると、例えば図 15 のように表すことができる。

cylinder braid で表現されていた対称性が従来の braid では表現しにくいものであることがわかる。

3. $n = 3$ の場合の考察

$n = 3$ の場合を 6-cylinder braid とよぶことにする。6-cylinder braid の元は σ_{ij} 、 $i = 1, 2, 3, j = 1, -1, 2, -2$ となり、12 個の元となるので word の一般形を求めるのは容易ではない。下図は $i = 1$ のときの σ_{1j} であり、(1) $j = 1$ (2) $j = -1$ (3) $j = 2$ (4) $j = -2$ である。

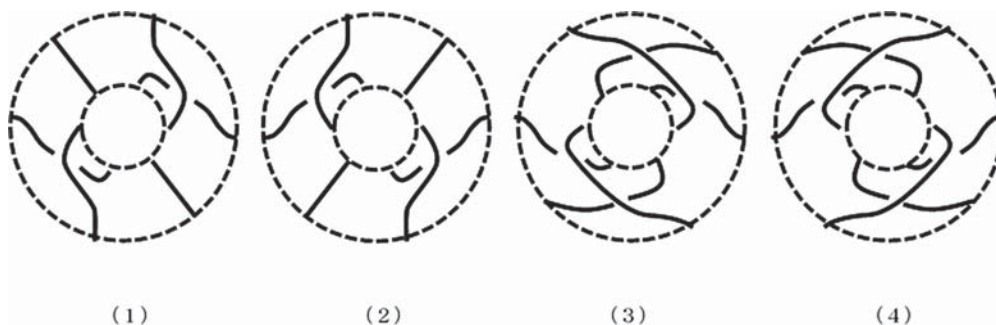


図 16

そこで、1つの制約として、alternating diagram である場合を考える。また、4-string cylinder braid のときと同様 $(\sigma_{i,1})^k$ は 2 本の strings の twist が現れるので、簡単のため、word の中には同じ元が続けては現れないものとする。

定義 4.1. 1つの braid の各 string を 1 方向に辿っていくとき、over crossing と under crossing が交互に現れるとき、この braid は alternating であるという。

$n = 3$ の元のうち、 $\sigma_{i,2}, \sigma_{i,2}$ ($i = 1, 2, 3$) は alternating ではないので、6 – cylinder braid で alternating diagram を表す word には $\sigma_{i,1}, \sigma_{i,-1}$ ($i = 1, 2, 3$) のみを用いることになる。

$\sigma_{2,1}, \sigma_{3,1}$ は $\sigma_{1,1}$ を回転したものであり、 $\sigma_{1,-1}$ は $\sigma_{1,1}$ を x 軸対称に対称移動したのもので、alternating diagram の word の最初の元は $\sigma_{1,1}$ であるとして一般性を失わない。このとき、alternating になるためには、over crossing から辿る string は、次は under crossing に、また、under crossing から辿る string は次は over crossing に到達しなければいけないので、word の $\sigma_{1,1}$ の次の元は $\sigma_{1,-1}$ 、または $\sigma_{3,-1}$ であることがわかる。($\sigma_{1,1} \sigma_{2,-1}$ は σ_0 と同値になるので、考えない。) word が $\sigma_{1,1} \sigma_{1,-1}$ のとき、diagram の外側に到達する直前が under crossing であるのは図 17 (1) の a, b の string であるので、 $\sigma_{1,1} \sigma_{1,-1}$ の次の元は $\sigma_{1,1}$ でしかないことがわかる。また、word が $\sigma_{1,1} \sigma_{3,-1}$ のとき、diagram の外側に到達する直前が over crossing であるのは図 17 (1) の c, d の string であるので、 $\sigma_{1,1} \sigma_{3,-1}$ の次の元はやはり $\sigma_{1,1}$ でしかないことがわかる。

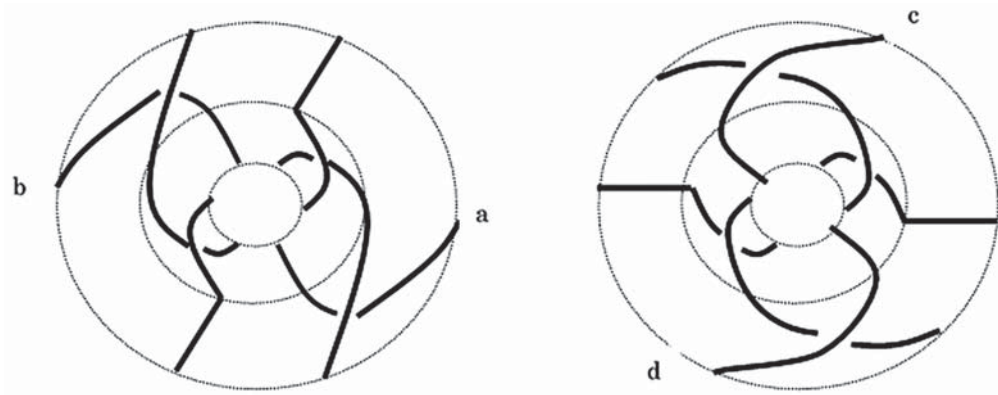


図 17

よって、6-string cylinder braid で alternating なものは、twist がある状態も考慮して、

命題 4.2. ダイアグラムの原点を中心とした回転移動を除き、6-string cylinder braid の word は次のように記述される。

$$(1) (\sigma_{1,1})^{k_1} (\sigma_{1,-1})^{h_1} (\sigma_{1,1})^{k_2} (\sigma_{1,-1})^{h_2} \dots (\sigma_{1,1})^{k_r} (\sigma_{1,-1})^{h_r}$$

または、

$$(2) (\sigma_{1,1})^{k_1} (\sigma_{3,-1})^{h_1} (\sigma_{1,1})^{k_2} (\sigma_{3,-1})^{h_2} \dots (\sigma_{1,1})^{k_r} (\sigma_{3,-1})^{h_r}$$

ただし、 $r \in \mathbb{N}$, $k_i, h_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($1 \leq i \leq r$)、 $(\sigma_{i,\epsilon})^k$ は word $\sigma_{i,\epsilon}$ を k 回繰り返すことを表す。

特に命題 4.2 において $r=3, k_i=h_i=1 (i=1, 2, 3)$ としたときのダイアグラムが図 18 であり、(1) (2) は \mathbb{R}^3 内で π 回転させると同値であることがわかる。

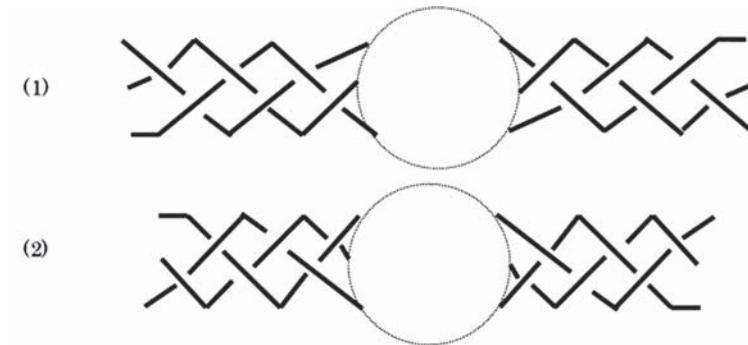


図 18

また、この cylinder braid は分離されており、通常の braid 表現で得られる 3-braid 2つを点対称位置に置いたものになっている。

4. 今後の課題

6-string cylinder braid では alternating という制約をつけると、通常の braid 以上に特徴のある braid は得られない。しかし、alternating という制約を除くと生成元が多く、まとまった記述を得られる可能性は小さい。string 数が 8 以上であればなおさらである。

期待される方法として、通常の braid と同様 $\sigma_{i+1,1}$ を $\sigma_{i,1}$ の逆元としてとらえ、また、 $\sigma_{i,2}$ を $\sigma_{i,1} \sigma_{i+1,1}$ としてとらえ、 $\sigma_{i,1}$ のみを生成元とする群構造を考えることで、記述は簡潔になると思われる。しかし、このとき、 $\sigma_{i,k}$ において $k \leq n$ の条件をどのように表現するかが問題である。

参考文献

- [1] S.C. カールソン著、金信泰造訳、「曲面・結び目・多様体のトポロジー」培風館、2003 年
- [2] 村杉邦男『結び目理論とその応用』日本評論社、1993 年。

(こばやし まさこ 教育学部)

2017 年 10 月 30 日受理

